A Incerteza

Introdução

Quando todas as componentes de erro forem eliminadas, ou as correcções apropriadas forem feitas, ainda resta uma incerteza acerca do resultado obtido, isto é, ainda restam dúvidas em como é que o resultado da medição representa o valor da grandeza que está a ser medida.

O que é a Incerteza

Incerteza do resultado de uma medida reflecte a falta de conhecimento exacto do valor da grandeza. O resultado da medida, depois da correcção de efeitos sistemáticos identificados, é ainda uma estimativa do valor da grandeza, devido à incerteza proveniente de efeitos aleatórios e de correcções imperfeitas para eliminar os efeitos sistemáticos.

Designações

Incerteza padrão é a incerteza do resultado de uma medida expressa como um desvio padrão.

*Incerteza do **tipo A***, é uma incerteza padrão, calculada a partir da análise estatística de uma série de observações.

*Incerteza do **tipo B***, quando a incerteza padrão é calculada a partir de outros processos que não o anterior. (Ex.: leitura)

Incerteza padrão combinada é a incerteza padrão do resultado de uma medida, quando esse resultado é obtido a partir dos valores de outras grandezas. Dependerá das incertezas padrão das outras grandezas envolvidas.

Incerteza expandida é uma quantidade que define o intervalo em torno do resultado da medida, dentro do qual se terá os valores que poderão ser razoavelmente atribuídos à grandeza, com um determinado nível de confiança.

INCERTEZA DO TIPO A

Na maior parte dos casos, a melhor estimativa de uma grandeza que varia aleatoriamente e para a qual foram obtidas *n* observações independentes, q_k *(k=1, ..., n)*, sob as mesmas condições de medida, será a média aritmética das *n* observações:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k$$

Assim, a média de uma grandeza, $\overline{X}_i$, é usada como a estimativa, x_i, para determinar o resultado da medida, *y*:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N) \quad \text{com } x_i = \overline{X}_i$$

Sendo esta grandeza, X_i, determinada a partir de *n* observações, X_{ik}, a incerteza da sua estimativa $u(x_i)$, será:

$$u(\overline{X}_i) = \sigma_{n-1}\left(\overline{X}_i\right) = \frac{\sigma_{n-1}(X_{ik})}{\sqrt{n}}$$

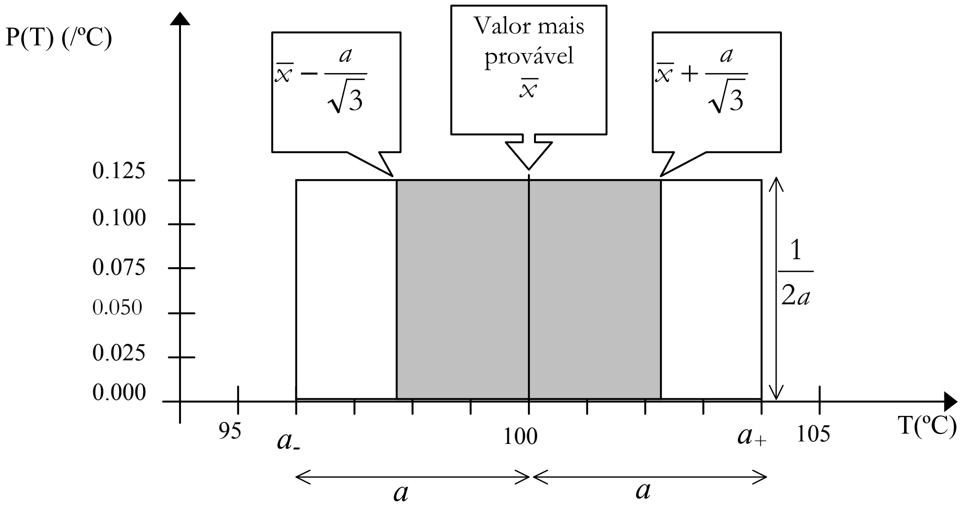
Esta será uma incerteza do tipo A, ou seja, uma incerteza estatística uma vez que é calculada como uma incerteza da média das *n* observações da mesma grandeza.

INCERTEZA DO TIPO B

A incerteza $u(x_i)$, é calculada a partir de juízos de valor que utilizam toda a informação relevante acerca da possível variação de X_i

Exemplo

Em muitos casos, só é possível estabelecer limites (superior e inferior) para X_i, em particular, afirmar que *"a probabilidade do valor de X_i estar dentro do intervalo de a_- a a_+ é de 1, e de zero de estarem fora desse intervalo".* Como não existe qualquer outra informação, X_i pode tomar qualquer valor dentro deste intervalo, indicando portanto que se supõe uma distribuição de probabilidade rectangular:



$x_i = \frac{a_+ + a_-}{2}$ com uma variância estimada de $u^2(x_i) = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12}$

$a_+ - a_- = 2a \Rightarrow u^2(x_i) = \frac{a^2}{3} \Rightarrow u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Aplicação

Um manual indica para o coeficiente linear de dilatação térmica do cobre a 20ºC, α_{20}(Cu), o valor de 16.52×10^{-6} ºC^{-1} e afirma simplesmente que *"o erro neste valor não deve exceder 0.40×10^{-6} ºC^{-1}".* Só se pode supor que o valor de α_{20}(Cu) se situa, com igual probabilidade, no intervalo de 16.12×10^{-6} ºC^{-1} a 16.92×10^{-6} ºC^{-1}. A variância desta distribuição rectangular simétrica de possíveis valores de α_{20}(Cu), com $a = 0.40 \times 10^{-6}$ ºC^{-1} é portanto

$$u^2(\alpha_{20}(Cu)) = \frac{(0.40\times10^{-6})^2}{3} = 53.3 \times 10^{-15} \text{ ºC}^{-1}$$

e a incerteza padrão é $u(\alpha_{20}(Cu)) = 0.23 \times 10^{-6}$ ºC^{-1}.

APRESENTAÇÃO DA INCERTEZA

$$Y = [y \pm u(y)] \qquad (unidades)$$

y estimativa do valor da grandeza

u(y) incerteza de *y* com determinado nível de confiança (que deve ser especificado)

Incerteza Combinada

Quando a grandeza *Y* não é medida directamente, dependendo portanto das estimativas das outras grandezas $x_1, x_2, ..., x_N$.

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

Nota: $u_c(y)$ não deixa de ser uma incerteza padrão e é uma estimativa do desvio padrão da distribuição de probabilidade de *y* (estimativa de *Y*)

Grandezas correlacionadas e não-correlacionadas

Quando as estimativas x_i e x_j das grandezas X_i e X_j são independentes, uma variação numa não implica uma variação na outra e as grandezas dizem-se *não-correlacionadas.* Quando isto não acontece, as grandezas dizem-se *correlacionadas*.

Duas grandezas X_i e X_j podem ser consideradas *não-correlacionadas* se:

- forem medidas repetidamente mas não simultaneamente em experiências independentes e diferentes.
- representarem quantidades resultantes de cálculos diferentes que foram feitos independentemente.
- puderem ser tratadas como uma constante.
- se nada for conhecido acerca da correlação entre elas.

Nota: na prática, as quantidades $X_1, X_2, ..., X_n$ são muitas vezes *correlacionadas* porque utilizam o mesmo aparelho de medida, os mesmos dados de referência e o mesmo processo físico de medição.

Grandezas não-correlacionadas

SOMA E SUBTRACÇÃO

$y = x_1 \pm x_2$ $$u(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)}$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

$y = x_1 \times x_2$

$y = x_1 / x_2$ $$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Grandezas correlacionadas

SOMA E SUBTRACÇÃO

$y = x_1 \pm x_2$ $$u(y) = u(x_1) + u(x_2)$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

$y = x_1 \times x_2$

$y = x_1 / x_2$ $$\frac{u(y)}{y} = \frac{u(x_1)}{x_1} + \frac{u(x_2)}{x_2}$$

POTÊNCIA

$y = x^P$ $$\frac{u(y)}{y} = p\left(\frac{u(x)}{x}\right)$$

Incerteza padrão o nível de confiança subjacente é o correspondente a 68.3%, que diz respeito, na distribuição de probabilidade, a uma largura de *um desvio padrão*

Incerteza expandida medida adicional de incerteza que fornece um intervalo dentro do qual possa estar o resultado da medição, com outro nível de confiança (90%, por exemplo); é obtida multiplicando a incerteza padrão combinada $u_c(y)$ por um factor k:

$$U = k\, u_c(y)$$

O resultado da medição é então expresso por $Y = y \pm U$, que é interpretado da seguinte forma:

A melhor estimativa atribuível à grandeza Y é y, e o intervalo cujos limites são $y - U$ e $y + U$ contém, com um determinado nível de confiança (p), os valores que podem ser razoavelmente atribuídos a Y.

INCERTEZA DAS MEDIDAS DIRECTAS

A incerteza de uma leitura é obviamente uma incerteza do tipo B, e é dada por

$$u_B(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

em que *a* (amplitude) é metade da menor divisão de escala do aparelho utilizado.

Quando se fazem várias leituras de uma mesma grandeza, a incerteza do tipo A da estimativa é calculada a partir do desvio padrão experimental e do factor *t-Student*:

$$u_A(\overline{x}) = t_{n-1}\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Como o importante é majorar a incerteza, vamos assumir que a incerteza final é sempre a soma da incerteza do tipo A com a do tipo B:

$$u(y) = u_A(y) + u_B(y)$$

INCERTEZA DAS MEDIDAS INDIRECTAS

Quando uma grandeza *y* é calculada a partir de outras medidas directamente, a incerteza de *y* será uma incerteza combinada.

Se tivermos vários conjuntos que determinam a grandeza *y*, a sua incerteza relativa final será a raiz quadrada da soma dos quadrados das incertezas relativas dos dois tipos – A e B.

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u_A(y)}{y}\right)^2 + \left(\frac{u_B(y)}{y}\right)^2}$$

Exemplo:

Considere o seguinte quadro de valores, para o qual o valor médio da tensão T é de $14.228\ N/mm^2$ com um desvio padrão $\sigma_{n-1} = 0.315\ N/mm^2$.

amostra nº	A (mm^2)	u(A) (mm^2)	u(A)/A	F (N)	u(F) (N)	u(F)/F	T (N/mm^2)	u(T) (N/mm^2)	u(T)/T
1	13.849	0.039	0.28%	193.9	1.1	0.58%	14.001	0.090	0.64%
2	13.876	0.039	0.28%	194.5	1.1	0.58%	14.017	0.090	0.64%
3	13.764	0.039	0.28%	202.4	1.2	0.58%	14.705	0.094	0.64%
4	13.732	0.038	0.28%	197.7	1.1	0.58%	14.397	0.092	0.64%
5	13.862	0.038	0.28%	194.3	1.1	0.58%	14.017	0.090	0.64%

A incerteza da média dos 5 valores obtidos para a grandeza T é uma incerteza do tipo A e será igual a:

$$u(\overline{T}) = t_{n-1}\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 1.6 \times \frac{0.315}{\sqrt{5}} = 0.23\ N/mm^2$$

$$\frac{u(\overline{T})}{\overline{T}} = \frac{0.23}{14.23} = 1.58\%$$

A incerteza total no valor médio de T será a soma quadrática de 0.64% mais 1.58%, levando a que:

$$\frac{u(\overline{T})}{\overline{T}} = \sqrt{(1.58\%)^2 + (0.64\%)^2} = 1.7\% \approx 1.5\% \Rightarrow u(\overline{T}) = 0.24\ N/mm^2$$

O valor obtido para tensão T será apresentado como:

$$T = 14.23 \pm 0.24\ \text{N/mm}^2$$

com uma incerteza relativa de 1.7%

Incerteza no declive de uma recta

Declive calculado a partir de pontos de um gráfico

Incerteza do tipo B

$$\frac{u(b)}{b} = 2\frac{u(x)}{x_2 - x_1} + 2\frac{u(y)}{y_2 - y_1}$$

Nota: a escala escolhida para a representação gráfica deve ser tal que a incerteza introduzida pela leitura no gráfico não seja superior à incerteza introduzida pela medida directa das grandezas.

Declive calculado por Regressão Linear

O coeficiente angular, *b*, vem afectado de uma incerteza do tipo A, determinada a partir da seguinte expressão:

$$u_A(b) = t_{n-1}\frac{\sigma_{y(n-1)}}{\sigma_{x(n-1)}}\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}}$$

t_{n-1} o factor *t-Student* para *n-1* medidas

$\sigma_{x(n-1)}$, o desvio padrão experimental para os valores de x

$\sigma_{y(n-1)}$, o desvio padrão experimental para os valores de y

r o factor de correlação

n o número de medidas experimentais.